

16/12

Общее решение ур-ний колебаний струны

* ур-ния колебаний струны:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u = u(x, t) \quad (1)$$

Особую роль при изучении ур-ния (1) играют спец. канонические координаты:

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at \end{cases}$$

Запишем (1) в (ξ, η) : $\Leftrightarrow$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = \eta \xi_x = 1, \quad \eta_x = 1 \Rightarrow u_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_\xi + u_\eta)_x = u_{\xi\xi} \cdot 1 + u_{\xi\eta} \cdot 1 + u_{\eta\xi} \cdot 1 + u_{\eta\eta} \cdot 1 = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

$$u_t = u_\xi \cdot \xi_t + u_\eta \cdot \eta_t = \{\xi_t = -a, \eta_t = a\} = -au_\xi + au_\eta$$

$$u_{tt} = (u_t)_t = (-au_\xi + au_\eta)_t = (-a)^2 u_{\xi\xi} + (-a)a u_{\xi\eta} + a(-a) u_{\eta\xi} + a^2 u_{\eta\eta}$$

$$+ a(-a)u_{\eta\xi} + a^2 u_{\eta\eta} = a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} a^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = a^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$ (2) — ур-ние коп. струны в спец. канон. коорд.

Связь $\square$ $u = F(\xi, \eta)$ — реш. ур-ния (2). Тогда

$u = F(x-at, x+at)$ — реш. исход. ур-ния (1)

Ур-ние (2) поддается полному реш-ю:

$$u_{\xi\eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} (u_{\xi}) = 0 \Rightarrow u_{\xi} = \varphi(\xi) \Leftrightarrow u = \int \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \varphi(\xi) + M = \int \frac{\partial M}{\partial \xi} = 0, M = \psi(\eta) \Rightarrow u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

с произвол. ф-циями $\varphi(\xi), \psi(\eta)$.

Более удобное обозначение: $\varphi(\xi) \rightarrow f(\xi),$

$$\psi(\eta) = g(\eta) \Rightarrow \boxed{u = f(\xi) + g(\eta), \forall f, g - \text{ладные}} \quad (3) -$$

— общее реш. ур-ния (2)

Вывод: общ. реш-е ур-ния (1) представимо в виде $(11) \boxed{u = f(x-at) + g(x+at), \forall f = f(s), \forall g = g(s)}$

Проверка: $u_t = -a f'(x-at) + a g'(x+at),$

$$u_{tt} = (-a)^2 f''(x-at) + a^2 g''(x+at)$$

$$u_x = f'(x-at) + g'(x+at)$$

$$u_{xx} = f''(x-at) + g''(x+at),$$

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$ - выполняется и выполняется там,

где ф-ции опред-ны и 2-е диофр-мы

Усл $f, g \in C^2 \Rightarrow$ ф-ла (н) определяет клас-
сич. реш. ур-ния кон. струны (1)

If ф-ции f и g имеют сколь угодно глад-
кость, то выражение (н) наз. обобщенным
(или формал. реш-м ур-ния (1))

Анализ общего решения

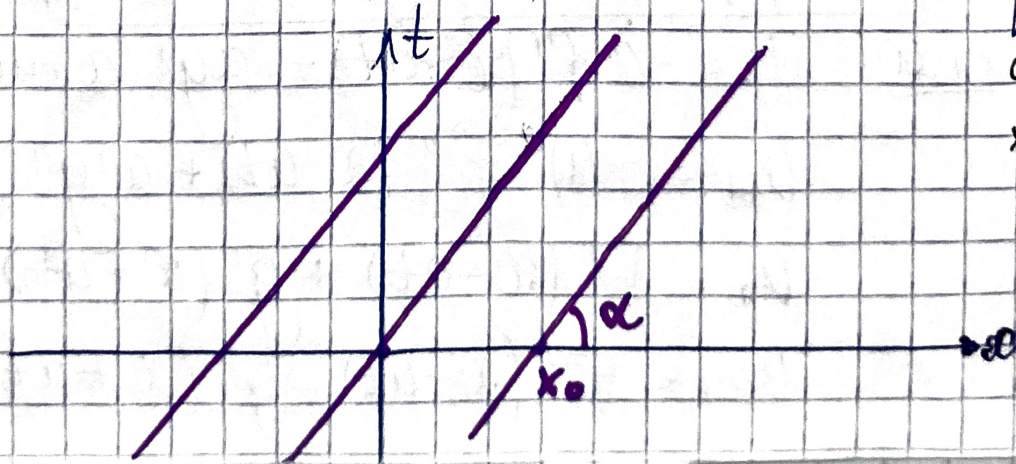
Основную роль при рассмотрении (н)
играют семейства прямых линий на
пл-ти ~~(x, t)~~ (x, t) :

$| x - at = C_1,$
 $| x + at = C_2, \quad \forall C_1, C_2 = \text{const.}$ Их еще наз.
сопут. семействами харак-к

Случай $g = 0 \Rightarrow u = f(x - at)$

Харак-ки $x - at = C_1, \quad \forall C_1 = \text{const} \sim x = at + x_0,$
 $x_0 = \text{const},$

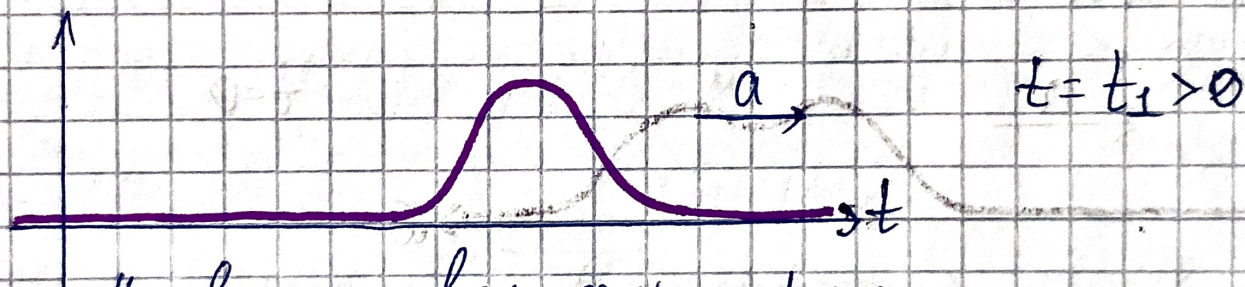
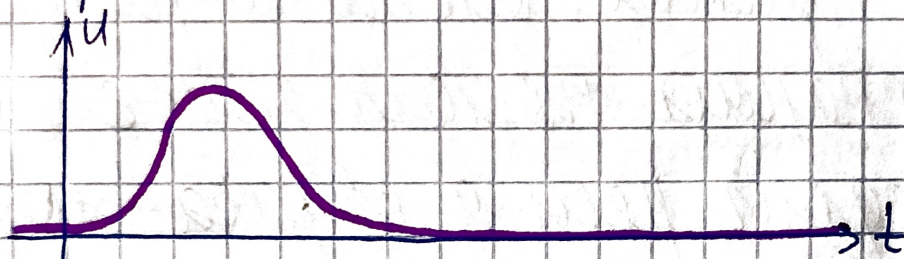
$\tan \alpha = 1/a$



$\sim$ характерист.
ур-ние
 $a > 0$ - ск-ть
движения,
 x_0 - нач. усл.

Семейство // прямых

Смысл харак-к: вдоль каждой такой линии $x = at + x_0$ реш. $u = f(x - at)$ остается const со знач. $f(x_0)$. Происходит перенос движения вдоль харак-к слева направо со ск-тью a



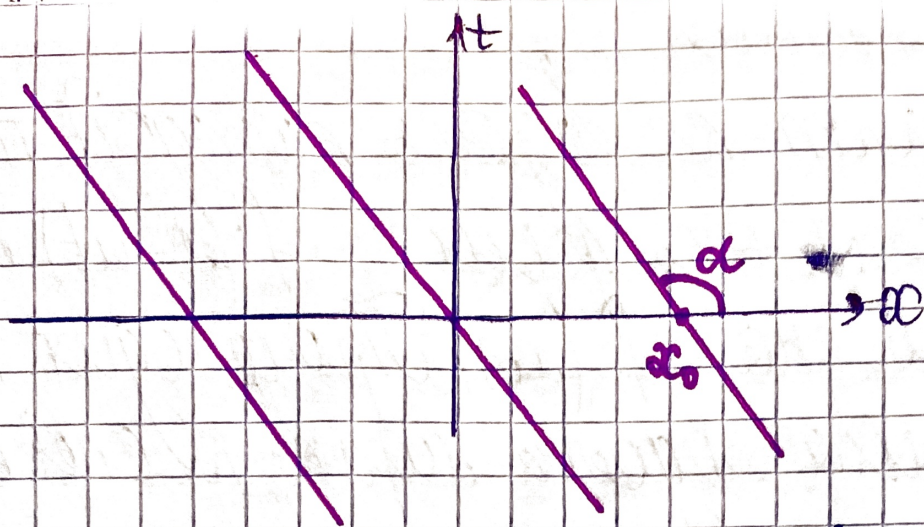
// сдвиг на величину $at_1 > 0$

Вывод: реш. $u = f(x - at)$ — прямая волна, движущая со ск-тью $a > 0$.

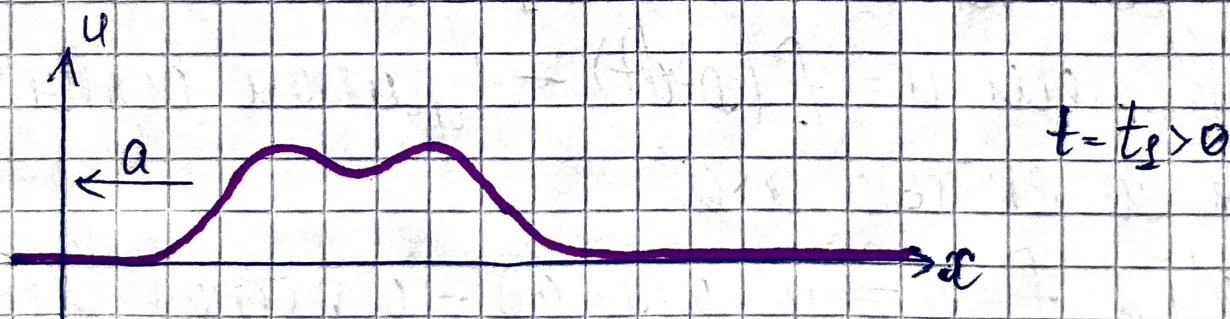
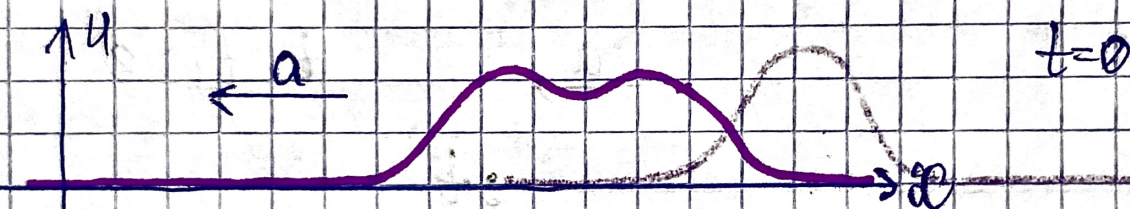
Случай 2 $f \equiv 0 \Rightarrow u = g(x + at)$ — обратная волна, движущаяся в обрат. направлении

Харак-ки: $x + at = C_2 \sim x = -at + x_0, \forall x_0 = \text{const}, \text{tg } \alpha = -1/a$

// График на след. стр. //



Семейство $\parallel$ прямых, вдоль α реш. $u = g(x + at)$ сохраняет постоян. знач-е.
 Происходит сдвиг реш-я справа-налево со ск-тью a .



Окончательный вывод: У реш. ур-ния (1) представ-ся в виде Σ прям. и обрат. волн.
 Результат сложения мб довольно неинтересным, даже в простых ситуациях.
 Пример $u(x, t) = \sin at \sin x$ — реш. (1)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos(at - x) - \cos(at + x)) = \frac{1}{2} \cos(x - at) - \frac{1}{2} \cos(x + at) - \text{прямая и обратные волны}$$

Σ прям. и обрат. волн дает стоячую волну (сравни с методом Фурье выше).
Ф-ла общ. реш-а, используемая при рассмотрении некотор. классич. задач

ЗК д/у-ния кол. струны

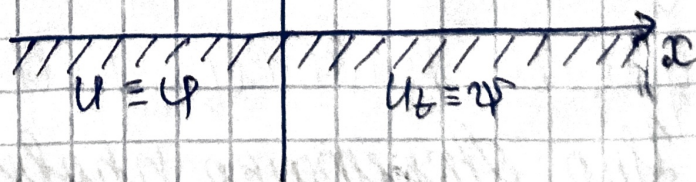
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (1)$$

Физич. интерпретация: размеры струны считаются очень большими по сравнению с размерами наблюдателя, влияние краёв не ощущается — ∞ струна.

Заданы начал. положение струны $\varphi(x)$ и нач. ск-ть $\psi(x)$

$$u = u(x, t) = ?$$

Реш. Верем общ. реш.



$$u = f(x - at) + g(x + at),$$

$$f = f(s) = ?, \quad g = g(s) = ?$$

$$\text{Нач. усл. } f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$[-af'(x) + ag'(x) = \psi(x), x \in \mathbb{R}$$

Вводим нейтрал. переменную s ($x \rightarrow s$),
где $s \in \mathbb{R} \Rightarrow$ получаем функц. с-цу:

$$\begin{cases} f(s) + g(s) = \varphi(s) \\ f'(s) - g'(s) = -\frac{1}{a}\psi(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(s) + g(s) = \varphi(s) \\ f(s) - g(s) = -\frac{1}{a} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\tau) d\tau + C/2, \\ g(s) = \frac{1}{2}\varphi(s) + \frac{1}{2a} \int_0^s \psi(\tau) d\tau - C/2 \end{cases} \text{ при}$$

всех $s \in \mathbb{R}$

Ф-ции f и g наход-ся однозначно с точностью до const $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \boxed{\varphi(x,t) = f(x-at) + g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(\tau) d\tau + \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\tau) d\tau - \frac{C}{2}} \\ = \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- ф-ла Даламбера (2), где $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

$\Downarrow \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда ф-ла (2) дает классич. реш. ЗК(1): $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

Упр Аккуратно провести дск-во $\Downarrow$

! зам Из пред. рассуждений $\Rightarrow$ реш. в зад (1) нах-ся однозначно, а именно - по ф-ле Даламбера

Оценка устойчивости

$$\exists |\varphi(x)| \leq M \text{ и } |\psi(x)| \leq M \text{ при } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$|u(x, t)| = \left| \frac{1}{2} (\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \right| \leq$$
$$\leq \frac{M+M}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} M ds = M + Mt = (1+t)M \text{ при } x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Оценку обычно применяют в полосу $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$. Тогда $|u(x, t)| \leq (1+T)M$ г/ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, T]$ — оценка устойчивости в полосе

Альтернативное применение

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi_1(x), & u_t(x, 0) = \psi_1(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi_2(x), & u_t(x, 0) = \psi_2(x) \end{cases}$$

$$|u_{tt} = a^2 u_{xx}, x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), u_t(x, 0) = \psi_2(x)$$

$$\exists |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \delta \text{ и } |\psi_2(x) - \psi_1(x)| \leq \delta \text{ при } \forall x \in \mathbb{R}$$

* реш. $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ и их разность

$$u(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t), \text{ удовн. зад.}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x), & u_t(x, 0) = \psi_2(x) - \psi_1(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u(x, t)| \equiv |u_2(x, t) - u_1(x, t)| \leq (1 + T')\delta \text{ при} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T']$$

Выборная δ достаточно малым
 $(1 + T')\delta \leq \varepsilon \Rightarrow |u_2(x, t) - u_1(x, t)| \leq \varepsilon$ (малое
отличие решений)